**Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)**
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 41-51
**p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X** 

# Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar

**Zulaikha, Trisilowati, Intan Fadhilah**
Jurusan Matematika, Universitas Brawijaya Malang

Email: zulaikha092@yahoo.com

**Info Artikel**

**Riwayat Artikel:**

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

**Kata Kunci:**

Kontrol optimal
Model epidemik SEIQR
Tingkat Kejadian Standar
Pontryagin
Simulasi Numerik

**ABSTRAK**

Penelitian ini dilakukan dengan modifikasi model epidemik SEIQR dengan tingkat kejadian standar dan kontrol optimal. Kontrol optimal dilakukan dengan menambahkan dua variabel kontrol yaitu usaha pengontrolan kontak langsung antara populasi rentan dengan populasi terinfeksi, dan pemberian obat pada populasi terinfeksi. Tujuan penelitian ini adalah untuk meminimumkan jumlah subpopulasi yang terinfeksi, jumlah subpopulasi laten, jumlah biaya edukasi dan biaya pemberian obat. Kondisi kontrol optimal pada penelitian ini diperoleh dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin. Selanjutnya, simulasi numerik dilakukan dengan metode *Sweep* Maju-Mundur untuk menunjukkan bagaimana pengaruh adanya kontrol terhadap model epidemik. Hasil penelitian yang dilakukan menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol terlihat efektif dalam menekan jumlah pertumbuhan subpopulasi terinfeksi dengan subpopulasi laten.



**Korespondensi:**

Zulaikha,
Jurusan Matematika,
Universitas Brawijaya Malang,
Jl. Veteran No. 50 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65145
Email: zulaikha092@yahoo.com

## 1. PENDAHULUAN

Penyakit menular disebabkan oleh agen biologi, seperti virus, bakteri maupun parasit. Suatu individu dapat terjangkit penyakit menular melalui kontak langsung maupun tidak langsung dengan individu yang terinfeksi. Akibat kontak antar individu tersebut, terjadilah suatu infeksi baru yang menjadi tanda adanya penyebaran penyakit. Penyebaran penyakit menular yang terus terjadi akan mengakibatkan kondisi yang disebut dengan epidemi.

Salah satu cara untuk menanggulangi masalah epidemi adalah dengan cara melakukan karantina terhadap individu yang terinfeksi. Karantina merupakan tempat penampungan dengan lokasi yang terpencil untuk mencegah penularan penyakit. Dengan dilakukannya karantina diharapkan dapat meminimalkan jumlah individu terinfeksi dan meninggal. Dikarenakan semakin banyaknya kasus epidemi yang terjadi, maka mendorong berbagai penelitian tentang penyebaran penyakit. Dalam bidang matematika, salah satu metode yang digunakan untuk masalah epidemi yakni dikenal dengan model epidemi penyakit.

Model epidemi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick [1]. Teori klasik mengenai model epidemi ini, membawa pengaruh besar dalam pemodelan matematika dan sangat relevan dengan situasi yang sebenernya, sehingga model epidemi banyak diteliti dan dikembangkan oleh para peneliti. Model yang diteliti oleh Kermack dan McKendrik adalah model SIR (*Suspectible-Infective-Recovered*) yang menjelaskan bahwa dalam sebuah populasi suatu individu dapat rentan terhadap suatu penyakit, lalu terinfeksi, dan dapat sembuh dari suatu infeksi tersebut [1]. Model SIR yang dikaji tersebut menggunakan asumsi yaitu dengan menggunakan populasi tertutup atau tanpa demografi, yaitu tidak adanya laju kematian, kelahiran, dan migrasi.

Hethcote, dkk.(2002) mengkaji efek karantina pada enam model endemik penyakit menular. Model tersebut memodifikasi model endemi SIS (*Suspectible-Infected-Suspectible*) dan SIR dengan menambahkan kelas Q sebagai individu yang dikarantina, yaitu individu yang telah dibersihkan dan dengan sukarela maupun terpaksa diisolasi dari kelas individu terinfeksi [2]. Model yang dikaji adalah SIQR (*Suspectible-Infected-Quarantined-Recovered*). Selanjutnya, Jumpen, dkk.(2009) mengkaji model SEIQR yaitu menambahkan kelas E (*Exposed*), mewakili sebagai individu yang terinfeksi namun tidak dapat menginfeksi. Model ini menggunakan tingkat kejadian standar dengan laju infeksi bergantung kepada interaksi antara individu yang rentan (S) dengan individu terinfeksi (I) dan laten (E) [3].

Pada tahun 2010, Mishra dan Jha mengembangkan model epidemi SEIQRS (*Suspectible-Infected-Quarantined-Recovered-Suspectible*). Model ini menggunakan laju pertumbuhan populasi yang konstan dan menggunakan tingkat kejadian infeksi bilinear. Pada model ini laju infeksi hanya dipengaruhi oleh interaksi antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi (I). Pada model, individu yang terinfeksi dapat langsung sembuh tanpa dikarantina terlebih dahulu [4]. Penelitian yang serupa dilakukan oleh Wang, dkk.(2014) dengan model SEIQRS dengan memodifikasi model yang dikaji Mishra dan Jha dengan membagi laju infeksi menjadi dua jenis, yaitu laju infeksi pertama bergantung kepada interaksi antara individu rentan (S) dengan individu laten (E) dan laju infeksi kedua bergantung kepada interaksi antara individu rentan (S) dengan individu terinfeksi (I) [5].

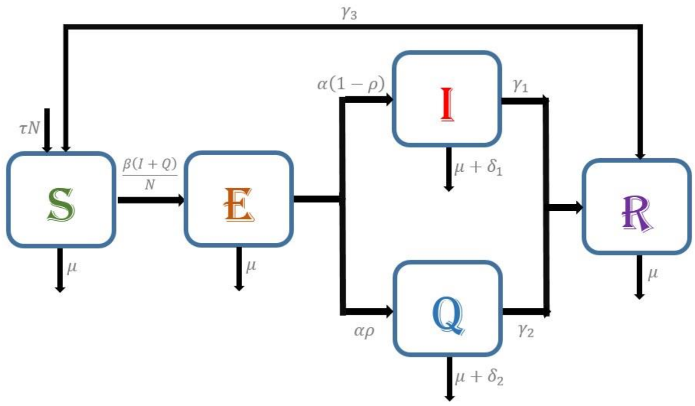
Pada tahun 2014, Li,dkk menggunakan model yang sama yaitu model epidemi SEIQRS dalam memodelkan dan mencari langkah pencegahan terhadap suatu penyakit yaitu (*Hand, Foot, and Mouth Disease*) di China. Pada model ini menggunakan tingkat kejadian infeksi standar. Laju infeksi pada model ini bergantung kepada interaksi individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi serta individu yang dikarantina. Penelitian Li, dkk. menggunakan data jumlah pasien HFMD di Cina untuk melakukan estimasi parameter tanpa melakukan analisis dinamik [6].

Berdasarkan pemaparan tersebut, pada makalah ini akan dikembangkan model epidemi SEIQRS dengan tingkat kejadian standar. Menurut Hethcote, dkk. (2002) menjelaskan bahwa infeksi dengan tingkat kejadian standar yaitu proporsi banyaknya kasus infeksi baru per satuan waktu dari interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi terhadap total populasi [2]. Infeksi dengan tingkat kejadian standar digunakan untuk menghindari peningkatan laju infeksi yang sangat tajam, sehingga menyebabkan model menjadi lebih realistik. Pada model yang dikaji dalam makalah ini, laju kelahiran yang digunakan tidak konstan sehingga ukuran populasi dapat berubah dan diasumsikan baha laju kematian alami pada populasi tidak sama dengan laju kelahirannya. Hal ini dilakukan karena pada faktanya jumlah pertumbuhan suatu populasi tidak sama dengan jumlah kematian populasi, baik kematian alami maupun kematian karena penyakit.

Model yang akan diteliti pada makalah ini memodifikasi model Li, dkk.(2014) dengan mengkontruksi dengan menambahkan laju kematian karena penyakit pada populasi individu yang terinfeksi maupun yang dikarantina dengan parameter $\delta_1$ dan $\delta_2$ serta melakukan pengontrolan yaitu mencegah terjadinya kontak langsung antara populasi rentan dengan populasi terinfeksi dan populasi yang dikarantina. Dalam hal ini, proses pengontrolan dilakukan melalu tindakan edukasi, yang diharapkan mengurangi kontak langsung antara populasi rentan dengan populasi terinfeksi dan populasi yang dikarantina. Selain itu, dilakukan pengontrolan dengan pemberian obat kepada populasi terinfeksi. Hasil dari penyelesaian kontrol optimal dilakukan dengan simulasi numerik dan interpretasi model.

## 2. METODE PENELITIAN

Model SEIQR dengan kejadian standar dalam penelitian ini adalah merupakan model epidemi untuk penyakit HFMD. Berikut adalah diagram kompartemen untuk model SEIQR dengan kejadian standar pada penyakit HFMD.




Gambar 1. Diagram kompartemen SEIQR kejadian standar pada penyakit HFMD

Dari Gambar 1 didapatkan suatu sistem persamaan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \tau N - \frac{\beta S(I+Q)}{N} - \mu S + \gamma_3 R \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{\beta S(I+Q)}{N} - \alpha E - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= \alpha(1-\rho)E - \gamma_1 I - \mu I - \delta_1 I \\
\frac{dQ}{dt} &= \alpha\rho E - \gamma_2 Q - \mu Q - \delta_2 Q \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \gamma_2 Q - \mu R - \gamma_3 R,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dengan parameter-parameter yang membentuk sistem dirincikan dalam tabel di bawah ini.

Tabel 1. Parameter Model SEIQR Kejadian Standar pada Penyakit HFMD

| Parameter | Keterangan |
|---|---|
| $S$ | Subpopulasi individu rentan |
| $E$ | Subpopulasi individu terinfeksi, akan tetapi tidak bisa menginfeksi (laten) |
| $I$ | Subpopulasi individu terinfeksi dan tanpa melakukan perawatan |
| $Q$ | Subpopulasi individu yang terinfeksi dan melakukan perawatan (karantina) |
| $R$ | Subpopulasi individu yang sembuh |
| $\tau$ | Laju pertumbuhan populasi |
| $\mu$ | Laju kematian alami |
| $\beta$ | Laju infeksi penyakit |
| $\alpha$ | Laju bertambahnya individu yang terinfeksi |
| $\rho$ | Proporsi individu terinfeksi yang dikarantina dengan $0 \leq \rho \leq 1$ |
| $\delta_1$ | Laju kematian individu karena penyakit pada subpopulasi individu terinfeksi |
| $\delta_2$ | Laju kematian individu karena penyakit pada subpopulasi individu karantina |
| $\gamma_1$ | Laju individu yang sembuh dari $I$ |
| $\gamma_2$ | Laju individu yang sembuh dari $Q$ |
| $\gamma_3$ | Laju individu yang sembuh dari $R$ kemabli rentan $(S)$ |

Selanjutnya dari Sistem Persamaan 1 diberikan dua kontrol yaitu kontrol edukasi pada subpopulasi $S$ dan kontrol pengobatan pada subpopulasi $I$. Dari pemberian kontrol tersebut maka akan didapatkan sistem persamaan yang baru. Setelah itu dilakukan penyelesaian kontrol optimal dan dilanjutkan dengan melakukan simulasi numerik pada program MATLAB dengan menggunakan algoritma *sweep* maju mundur. Adapun secara lebih rincinya, langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Memformulasikan model SEIQR dengan kejadian standar yang telah diberikan kontrol edukasi dan kontrol pengobatan
2. Menentukan fungsi tujuan untuk model SEIQR
3. Menentukan fungsi Hamiltonian

4. Menentukan kondisi stasioner, persamaan *state*, persamaan *costate*
5. Menentukan kontrol optimal untuk edukasi dan kontrol optimal untuk pengobatan
6. Melakukan simulasi numerik

## 3. HASIL DAN ANALISIS

Nilai dari kontrol edukasi terhadap subpopulasi rentan $(S)$ dan kontrol pengobatan terhadap subpopulasi terinfeksi $(I)$ secara berturut-turut dinotasikan dengan $u_1$ dan $u_2$.

### 3.1. Model SEIQR kejadian Standar pada Penyakit HFMD dengan Kontrol

Kontrol edukasi pada penelitian ini dimaksudkan untuk memberikan pengetahuan agar seorang individu dapat mencegah terjadinya kontak langsung antara subpopulasi rentan dengan subpopulasi terinfeksi dan juga karantina. Usaha pengontrolan kedua adalah dengan memberikan obat pada subpopulasi terinfeksi. Pemberian obat ini diberikan untuk meminimalisir jumlah subpopulasi terinfeksi. Kedua pengontrolan yang dilakukan terhadap model menjadikan Sistem Persamaan 1 menjadi sistem persamaan baru sebagai Sistem Persamaan Model SEIQR kejadian standar pada penyakit HFMD dengan kontrol, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \tau N - \frac{\beta S((1-u_1)I+Q)}{N} - \mu S + \gamma_3 R \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{\beta S((1-u_1)I+Q)}{N} - \alpha E - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= \alpha(1-\rho)E - \gamma_1 I - \mu I - \delta_1 I - u_2 I \\
\frac{dQ}{dt} &= \alpha\rho E - \gamma_2 Q - \mu Q - \delta_2 Q \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \gamma_2 Q - \mu R - \gamma_3 R + u_2 I.
\end{aligned} \tag{2}$$

### 3.2. Fungsi Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk meminimumkan subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi populasi laten, serta meminimumkan biaya edukasi dan biaya pengobatan. Sehingga fungsi tujuan yang diberikan adalah sebagai berikut

$$J(u_1,u_2) = \int_0^T E + I + Cu_1^2 + Du_2^2 dt, \tag{3}$$

dengan $C$ dan $D$ secara berturut adalah bobot yang berkolerasi dengan biaya pencegahan kontak langsung antara populasi rentan dengan populasi yang terinfeksi dan bobot yang berkolerasi dengan biaya pemberian obat pada populasi yang terinfeksi. Selanjutnya adalah dengan menentukan kontrol optimal $u_1^*$ dan $u_2^*$ sedemikian sehingga berlaku

$$J(u_1^*,u_2^*) = \min\{J(u_1,u_2) \mid u_1,u_2 \in U\},$$

dengan $U = \{(u_1,u_2) \mid 0 \le u_1 \le 1, 0 \le u_2 \le 1\}$. Masalah kontrol optimal dapat dipenuhi jika masalah tersebut memenuhi kondisi pada prinsrip minimum Pontryagin.

### 3.3. Bentuk Hamilton

Bentuk Hamiltonian yang bersesusaian dengan Sistem Persamaan 2, yaitu

$$\begin{aligned}
H &= E + I + Cu_1^2 + Du_1^2 + \sum_i^5 \lambda_i f_i \\
&= E + I + Cu_1^2 + Du_1^2 + \lambda_i\left(\tau N - \frac{\beta S((1-u_1)I+Q)}{N} - \mu S + \gamma_3 R\right) \\
&\quad +\lambda_2\left(\frac{\beta S\big((1-u_1)I+Q\big)}{N} - \alpha E - \mu E\right) \\
&\qquad + \lambda_3(\alpha(1-\rho)E - \gamma_1 I - \mu I - \delta_1 I - u_2 I)
\end{aligned}$$

$$+\lambda_4(\alpha\rho E-\gamma_2 Q-\mu Q-\delta_2 Q)+\lambda_5(\gamma_1 I+\gamma_2 Q-\mu R-\gamma_3 R+u_2 I).$$

Fungsi Hamiltonian akan mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi stasioner kondisi persamaan *state* dan *costate*.

### 3.4. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner merupakan kondisi dimana kontrol optimal $u_1$ dan $u_2$ harus dapat meminimumkan bentuk Hamilton pada setiap waktu. Hal ini mengakibatkan bahwa terdapat kondisi yang harus dipenuhi yaitu turunan pertama bentuk Hamilton terhadap $u_1$ dan turunan pertama bentuk Hamilton terhadap $u_2$ harus sama dengan nol [8]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_1}=0 \quad & \leftrightarrow 2Cu_1+\lambda_1\left(\frac{\beta SI}{N}\right)-\lambda_2\left(\frac{\beta SI}{N}\right)=0\\
& \leftrightarrow 2Cu_1=\lambda_2\left(\frac{\beta SI}{N}\right)-\lambda_1\left(\frac{\beta SI}{N}\right)\\
& \leftrightarrow 2Cu_1=(\lambda_2-\lambda_1)\left(\frac{\beta SI}{N}\right)\\
& \leftrightarrow u_1=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\frac{\beta SI}{N}\right)}{2C}\\
& \leftrightarrow u_1=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta SI}{2CN}.\\
\frac{\partial H}{\partial u_2}=0 \quad & \leftrightarrow 2Du_2-\lambda_3 I+\lambda_5 I=0\\
& \leftrightarrow 2Du_2=\lambda_3 I-\lambda_5 I\\
& \leftrightarrow 2Du_2=(\lambda_3-\lambda_5)I\\
& \leftrightarrow u_2=\frac{(\lambda_3-\lambda_5)I}{2D}
\end{aligned}$$

Karena $u_1$ merupakan suatu proporsi, maka didefinisikan $0\le u_1\le 1$ dan $0\le u_2\le 1$ didapatkan solusi untuk $u_1^*$ dan $u_2^*$ berikut

$$u_1^*=\begin{cases}0, & u_1\le 0\\ u_1, & 0<u_1<1\\ 1, & u_1\ge 1\end{cases}$$

dan

$$u_2^*=\begin{cases}0, & u_1\le 0\\ u_2, & 0<u_2<1\\ 1, & u_2\ge 1.\end{cases}$$

Dengan demikian, nilai kontrol optimal $u_1^*$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$u_1^*=\min\left\{\max\left(0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta SI}{2CN}\right),1\right\}$$

dan

$$u_2^*=\min\left\{\max\left(0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)I}{2D}\right),1\right\}.$$

### 3.5. Persamaan *State*

Persamaan *state* merupakan persamaan yang menjadi kendala dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal. Berdasarkan Sistem Persamaan 2 didapatkan persamaan *state* sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{dS}{dt} &= \tau N - \frac{\beta S\big((1-u_1)I + Q\big)}{N} - \mu S + \gamma_3 R \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta S\big((1-u_1)I + Q\big)}{N} - \alpha E - \mu E \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \frac{dI}{dt} &= \alpha(1-\rho)E - \gamma_1 I - \mu I - \delta_1 I - u_2 I \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \frac{dQ}{dt} &= \alpha\rho E - \gamma_2 Q - \mu Q - \delta_2 Q \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \gamma_2 Q - \mu R - \gamma_3 R + u_2 I,
\end{aligned} \tag{4}
$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0$ dan $R(0) = R_0$.

**3.6. Persamaan *Costate***

Persamaan *costate* merupakan nilai negatif dari fungsi Hamiltonian yang diturunkan terhadap variabel-variabel *state*. Adapun persamaan *costate* yang didapatkan adalah sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} &= \lambda_1\left(\frac{\beta I(1-u_1) + \beta Q}{N} + \mu\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta I(1-u_1) - \beta Q}{N}\right) \\
\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} &= -1 + \lambda_2(\alpha+\mu) + \lambda_3\big(-\alpha(1-\rho)\big) - \lambda_4\alpha\rho \\
\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} &= -1 + \lambda_1\left(\frac{\beta S(1-u_1)}{N}\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta S(1-u_1)}{N}\right) + \lambda_3(\gamma_1 + \mu + \delta_1 + u_2) \\
&\quad + \lambda_5(-\gamma_1 - u_2) \\
\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} &= \lambda_1\left(\frac{\beta S}{N}\right) + \lambda_2\left(-\frac{\beta S}{N}\right) + \lambda_4(\gamma_2 + \mu + \delta_2) - \lambda_5\gamma_2 \\
\frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} &= -\lambda_1\gamma_3 + \lambda_5(\mu + \gamma_3),
\end{aligned} \tag{5}
$$

dengan kondisi transversalnya yaitu $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = 0$.

**3.6. Solusi Sistem Optimal**

Solusi untuk sistem optimal diperoleh dengan mensubstitusikan nilai dari kontrol optimal $u^*$ ke dalam Sistem Persamaan 4 dan 5, sehingga diperoleh solusi sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1^*} = \frac{dS^*}{dt} &= \tau N - \frac{\beta S^*\big((1-u_1^*)I^* + Q^*\big)}{N} - \mu S^* + \gamma_3 R^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2^*} = \frac{dE^*}{dt} &= \frac{\beta S^*\big((1-u_1^*)I^* + Q^*\big)}{N} - \alpha E^* - \mu E^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3^*} = \frac{dI^*}{dt} &= \alpha(1-\rho)E^* - \gamma_1 I^* - \mu I^* - \delta_1 I^* - u_2 I^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4^*} = \frac{dQ^*}{dt} &= \alpha\rho E^* - \gamma_2 Q^* - \mu Q^* - \delta_2 Q^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_5^*} = \frac{dR^*}{dt} &= \gamma_1 I^* + \gamma_2 Q^* - \mu R^* - \gamma_3 R^* + u_2 I^* \\
\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S^*} &= \lambda_1\left(\frac{\beta I^*(1-u_1^*) + \beta Q^*}{N} + \mu\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta I^*(1-u_1^*) - \beta Q^*}{N}\right) \\
\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E^*} &= -1 + \lambda_2(\alpha+\mu) + \lambda_3\big(-\alpha(1-\rho)\big) - \lambda_4\alpha\rho \\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I^*} &= -1 + \lambda_1\left(\frac{\beta S^*(1-u_1^*)}{N}\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta S^*(1-u_1^*)}{N}\right) \\
&\qquad + \lambda_3(\gamma_1 + \mu + \delta_1 + u_2^*) \\
&\quad + \lambda_5(-\gamma_1 - u_2^*) \\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q^*} &= \lambda_1\left(\frac{\beta S^*}{N}\right) + \lambda_2\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right) + \lambda_4(\gamma_2 + \mu + \delta_2) - \lambda_5\gamma_2
\end{aligned}
$$

$$\frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R^*} \quad = -\lambda_1\gamma_3 + \lambda_5(\mu + \gamma_3),$$

dengan kondisi batas yaitu $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$, $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = 0$.

**3.7. Teorema Kontrol Optimal**

Jika diberikan kontrol optimal $u_1^*, u_2^*$ dan penyelesaian persamaan *state* yang optimal $S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*$, serta yang meminimumkan fungsi tujuan $J(u_1, u_2)$, msks terdapat variabel-variabel *costate* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dan $\lambda_5$ yang memenuhi sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S^*} \quad &= \lambda_1\left(\frac{\beta I^*(1-u_1^*) + \beta Q^*}{N} + \mu\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta I^*(1-u_1^*) - \beta Q^*}{N}\right)\\
\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E^*} \quad &= -1 + \lambda_2(\alpha + \mu) + \lambda_3\big(-\alpha(1-\rho)\big) - \lambda_4\alpha\rho\\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I^*} \quad &= -1 + \lambda_1\left(\frac{\beta S^*(1-u_1^*)}{N}\right) + \lambda_2\left(\frac{-\beta S^*(1-u_1^*)}{N}\right)\\
&\qquad + \lambda_3(\gamma_1 + \mu + \delta_1 + u_2^*)\\
&\quad +\lambda_5(-\gamma_1 - u_2^*)\\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q^*} \quad &= \lambda_1\left(\frac{\beta S^*}{N}\right) + \lambda_2\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right) + \lambda_4(\gamma_2 + \mu + \delta_2) - \lambda_5\gamma_2\\
\frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R^*} \quad &= -\lambda_1\gamma_3 + \lambda_5(\mu + \gamma_3),
\end{aligned}$$

dengan kondisi transversalnya adalah $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = 0$. Kontrol optimal $u_1^*$ dan $u_2^*$ dinyatakan sebagai berikut

$$u_1^* = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2CN}\right), 1\right\}$$

dan

$$u_1^* = \min\left\{\max\left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I}{2D}\right), 1\right\}.$$

**3.8. Algoritma *Sweep* Maju Mundur**

Penyelesaian simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan algoritma *sweep* maju mundur. Variabel $S, E, I, Q, R, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, u_1$ dan $u_2$ dinyatakan dalam notasi $S(i), E(i), I(i), Q(i), R(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i), \lambda_3(i), \lambda_4(i), \lambda_5(i), u_1(i)$ dan $u_2(i)$, dengan $i = 0, 1, 2, ....$ Langkah-langkah algoritma metode *sweep* maju mundur sebagai berikut

**Langkah 1**

Menentukan nilai awal: $S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0), \lambda_1(n) = \lambda_2(n) = \lambda_3(n) = \lambda_4(n) = \lambda_5(n) = 0$ dan kesalahan toleransi

Pada langkah ini juga dibiberikan nilai awal dari parameter $S(0), E(0), I(0), Q(0), R_0$.

Tabel 2. Nilai Parameter $S(0), E(0), I(0), Q(0), R_0$

| $S(0)$ | $E(0)$ | $I(0)$ | $Q(0)$ | $R_0$ |
|---|---|---|---|---|
| $1{,}4 \times 10^8$ | $1{,}979 \times 10^4$ | $1{,}8001 \times 10^3$ | 1,673 | 1,0809 |

$R_0$ merupakan bilangan reproduksi dasar, dengan

$$R_0 = \frac{\beta}{\beta + \mu}\left(\frac{(1-\rho)\alpha}{\gamma_1} + \frac{\rho\alpha}{\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \mu}\right),$$

sehingga diperoleh $R_0 = 1{,}0809$. Karena $R_0 > 1$, maka terjadi penyebaran penyakit pada masing-masing populasi.

**Langkah 2**
Dibuat tebakan awal $u_1$ dan $u_2$.
**Langkah 3**
Hitung nilai $S(i+1), E(i+1), I(i+1), Q(i+1), R(i+1)$ dengan nilai awal pada Langkah 1 menggunakan metode *Runge Kutta* orde 4 langkah maju.
**Langkah 4**
Hitung nilai $\lambda_1(k-1), \lambda_2(k-1), \lambda_3(k-1), \lambda_4(k-1), \lambda_5(k-1)$ dengan kondisi transversal menggunakan metode *Runge Kutta* orde 4 langkah mundur.
**Langkah 5**
Hitung nilai kontrol

$$u_1(i) = \min\left\{\max\left(0, \frac{\lambda_2(i) - \lambda_1(i)\beta S(i) I(i)}{2CN(i)}\right), 1\right\}$$

dan

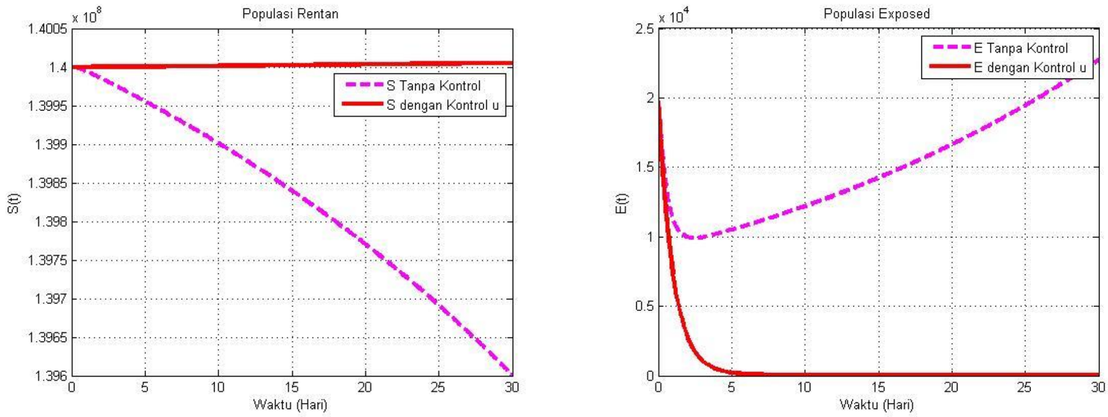
$$u_2(i) = \min\left\{\max\left(0, \frac{\lambda_3(i) - \lambda_5(i) I(i)}{2D}\right), 1\right\}.$$

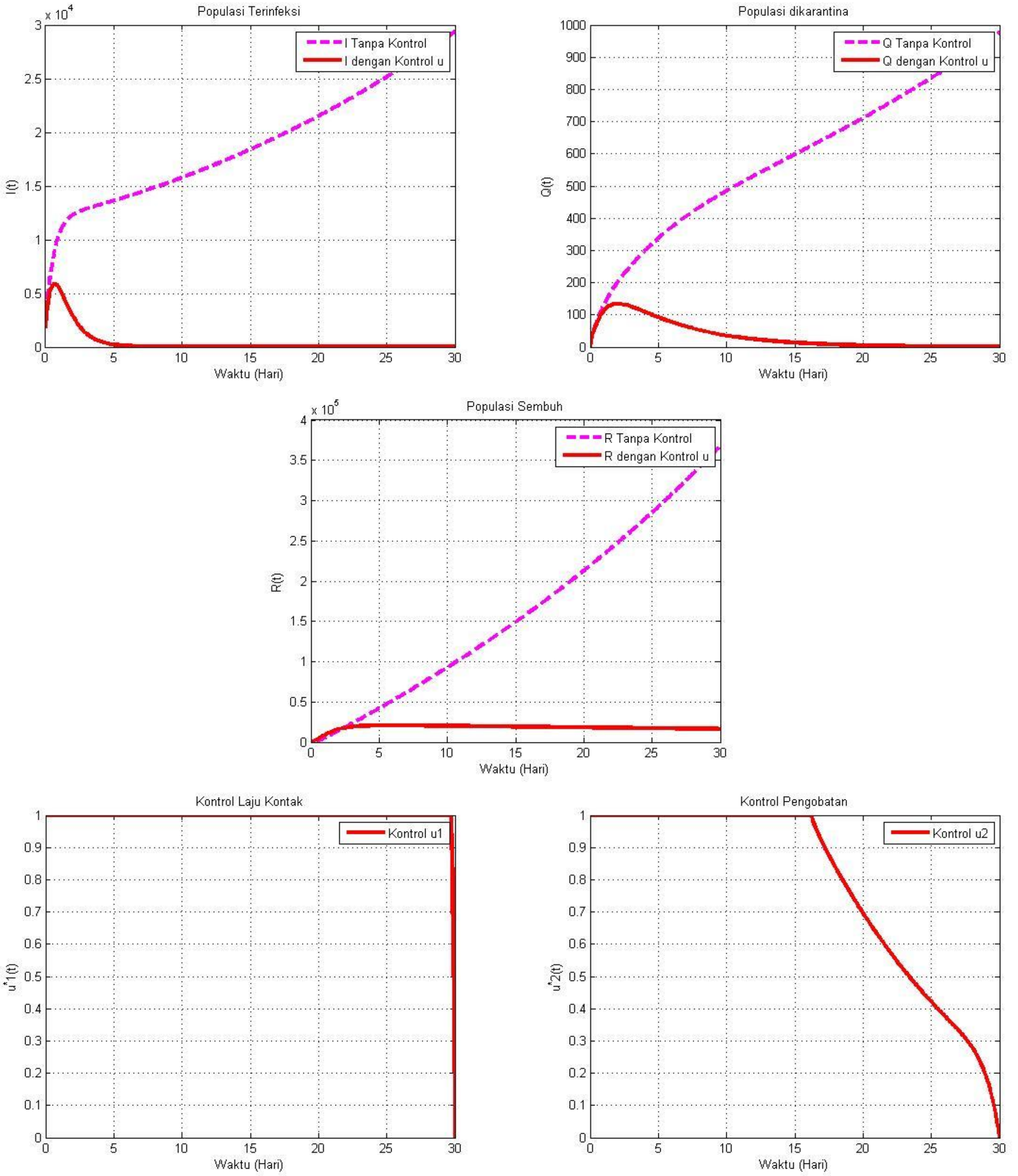
**Langkah 6**
Hitung nilai kesalahan dari variabel-variabel $u_1, u_2, S, E, I, Q, R, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dan $\lambda_5$ berdasarkan nilai iterasi pada saat ini dan nilai iterasi sebelumnya. Jika nilai kesalahan lebih besar dari toleransi maka kembali ke langkah 3.
**Langkah 7**
Cetak $S^* = S, E^* = E, I^* = I, Q^* = Q, R^* = R, u_1^* = u_1$ dan $u_2^* = u_2$.

### 3.9. Hasil Simulasi Numerik

Pada penelitian ini diberikan beberapa simulasi. Simulasi pertama diberikan bobot $C = 0{,}1$ dan $D = 0{,}5$, sedangkan untuk simulasi kedua diberikan bobot $C = 0{,}5$ dan $D = 0{,}5$.

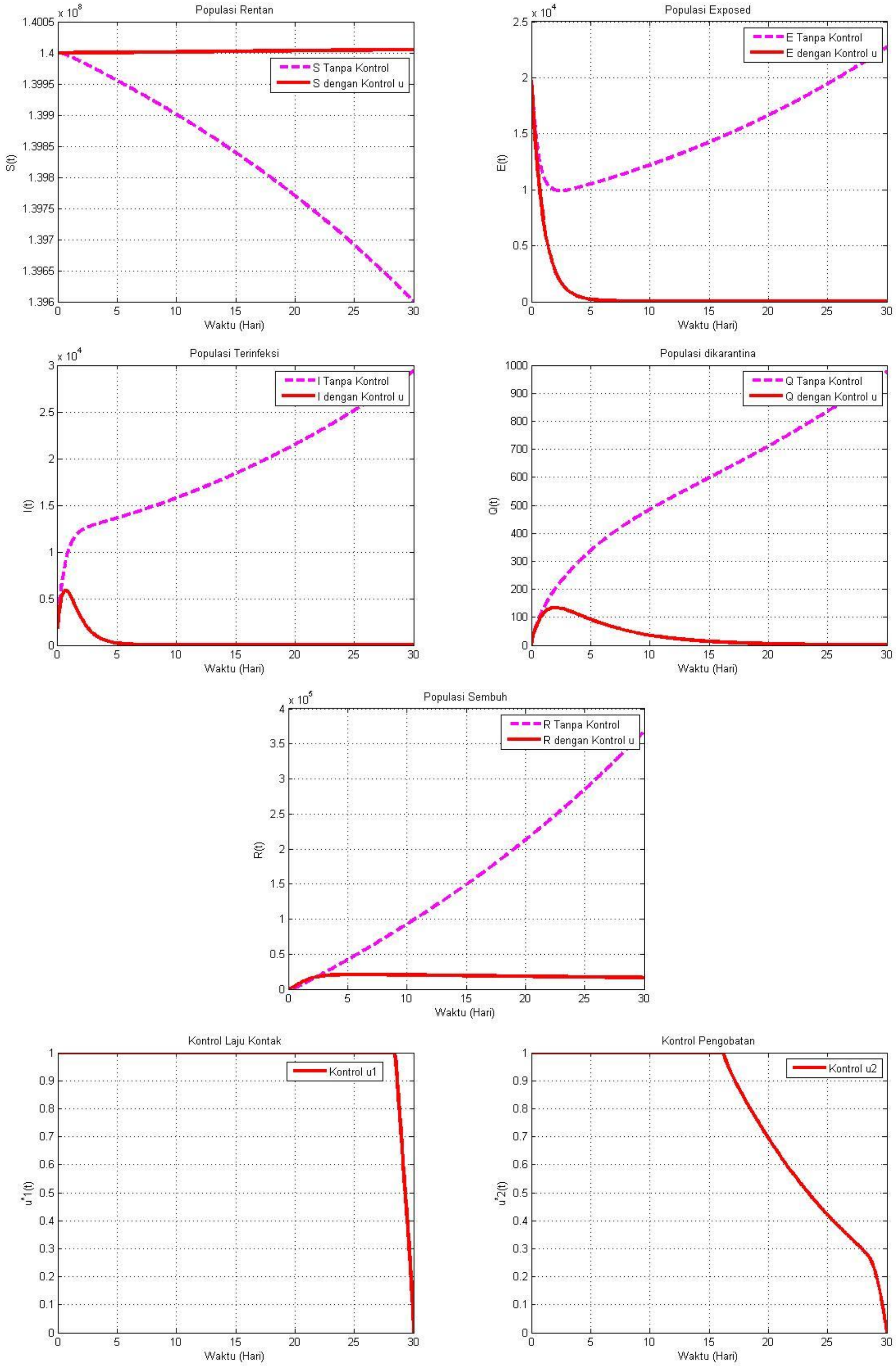
**Simulasi 1**






Gambar 2. Hasil simulasi 1 dengan $C = 0{,}1$ dan $D = 0{,}5$

**Simulasi 2**




Gambar 3. Hasil simulasi 2 dengan $C = 0,5$ dan $D = 0,5$

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa Model SEIQR dengan kejadian standar pada penyebaran penyakit HFMD dapat dimodifikasi dengan menambahkan kontrol edukasi pada subpopulasi rentan $(S)$ dan kontrol pengobatan pada subpopulasi terinfeksi $(I)$. Kedua pengontrolan ini bertujuan untuk meminimumkan jumlah subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi laten, serta biaya edukasi dan pengobatan. Hasil dari simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika diberikan kontrol terhadap model SEIQR dapat meminimalisir subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi laten.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Jurnal ini merupakan bagian dari penelitian Pascasarjana Universitas Brawijaya dan merupakan bagian penelitian yang diadakan atas naungan SIMANIS Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2017-2018. Kami ucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang sudah membantu dan mendukung atas penelitian ini.

## REFERENSI

[1] Kermack WO, McKendrick AG. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. Proceeding of the Royal Society of London. Series A. 1927. h 700-721.
[2] Hethcote H, Zhien M, Shengbing L. Effects of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Diseases. *Mathematical Biosciences*. 2002. h 141-160.
[3] Jumpen W, Wiwatanapataphee B, Wu YH, Tang IM. A SEIQR Model for Pandemic Influenza and Its Parameter Identification. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009. 247-265.
[4] Mishra BK, Singh AK. Two Quarantine Models on the Attack of Malicious Objects in Computer Network. *Mathematical Problems in Engineering*. 2012.
[5] Wang F, Yang F, Zhang Y, Ma J. Stability Analysis of a SEIQRS Model with Graded Infection Rates for Internet Worms. Journal of Computer. 2014. h 2420-2427.
[6] Li Y, Zhang J. 2014. Modeling and Preventive Measures of Hand, Foot and Mouth Disease (HFMD) in China. International Journal of Environmental Research and Public Health. 2014. 3108-3117.
[7] Lenhart S. dan Workman JT. Optimal Control Applied to Biological Models. USA: Chapman and Hall/ CRC, Taylor and Francis Group; 2007.